Exercices

Exercice 1 (Point fixe) : On cherche à déterminer la racine d'un nombre $a > 0$ en se ramenant à la recherche de 0 de la fonction $f(x) = x^2 - a$. Pour résoudre l'équation $f(x) = 0$, on va écrire cette équation sous la forme d'une équation de point fixe :

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = x \tag{1}$$

où $g(x)$ devra être bien choisi.

1. (*Méthode de Héron*) Considérons le choix de fonction $g(x)$ suivant :

$$g(x) = \frac{x + \frac{a}{x}}{2}$$

   a) Montrer l'équivalence (1) pour ce choix de fonction g.
   b) Montrer que l'algorithme de point fixe converge. Préciser son ordre.
   c) **(Bonus)** À quel algorithme correspond ce choix de fonction $g(x)$?

2. Reprenons l'étude mais dans la situation où on choisit :

$$g(x) = x^2 + x - a$$

   a) Montrer l'équivalence (1) pour ce choix de fonction g.
   b) La méthode converge-t-elle ? Si oui, à quel ordre ?

Exercice 2 (Inverse d'un nombre) : Dans cet exercice, on se propose de construire un algorithme pour calculer l'inverse d'un nombre $a \neq 0$. On impose comme contrainte à l'algorithme de n'utiliser que les opérations d'addition, soustraction et multiplication.

1. Commençons en prenant la fonction $f(x) = ax - 1$.
   a) Après avoir justifié que le 0 de f est bien l'inverse de a, donner l'*algorithme de Newton* dans ce cas. Cet algorithme répond-il au problème qu'on se propose de résoudre ?
   b) Qu'en est-il de la *méthode de la fausse position* ?

2. Considérons maintenant $f(x) = \frac{1}{ax} - 1$.
   (a) Justifier que le 0 de f est bien l'inverse de a et écrire l'*algorithme de Newton* dans ce cas. Donner (en justifiant) l'ordre de la méthode. La méthode obtenue répond-elle au problème proposé ?
   (b) Dans quel intervalle peut-on initialiser la méthode pour garantir la convergence ?
   (c) Écrire la *méthode de la fausse position* dans ce cas. A-t-on une méthode applicable ?

Exercice 3 (Newton vectoriel) : Soit $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. On souhaite déterminer un point de coordonnées (x_0, y_0) annulant la fonction $\mathbf{F}$.

1. a) Écrire l'*algorithme de Newton* dans ce cas.
   b) Que se passe-t-il si $\mathbf{F}$ est une application linéaire ?

2. **(Application)** Considérons une antenne dont la portée $p(x, y)$ est donnée par :

$$p_{x_0,y_0}(x, y) = e^{-T\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)}$$

   où $T > 0$ est un paramètre et (x_0, y_0) représente la position de l'antenne dans le plan. Étant donné N villes positionnées en $(x_i, y_i)_{i=1,\cdots,N}$, on note par $p_i = p_{x_0,y_0}(x_i, y_i)$ la couverture dans la ville i. L'objectif est de déterminer la position optimale (x_0^*, y_0^*) de l'antenne pour avoir la meilleure couverture totale.

   a) Formaliser ce problème comme un problème de minimisation.
   b) Proposer une méthode de résolution et faite le lien avec la question 1.a).

Exercice 4 (Gauss-Newton) : Soit $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ où on suppose $p \geq n$. On cherche à résoudre numériquement le problème de minimisation :

$$\text{Trouver} \quad \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_2^2 \tag{2}$$

1. a) Justifier que si $\mathbf{f}$ est différentiable, alors $F(\mathbf{x}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_2^2$ est aussi différentiable.

   b) Donner l'équation satisfaite par les points critiques de $F(\mathbf{x})$ en fonction de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ et de sa différentielle.

   c) Déduire une méthode pour résoudre le problème de minimisation (2) à l'aide de la *méthode de Newton.*

2. Une seconde approche consiste à s'inspirer des *méthodes de descente de gradient.* Pour ce faire, l'idée est de linéarisé $\mathbf{f}(x)$ au voisinage de $\mathbf{x}_0$.

   a) Étant donné x_1 proche de x_0, donner une approximation linéaire de $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1)$ en fonction de $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, $d_{\mathbf{x}_0}\mathbf{f}$ et $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$.

   b) En s'inspirant de la *méthode de descente de gradient* à pas constant proposer un algorithme pour résoudre (2).

   c) En s'inspirant cette fois de la *méthode de Newton* proposer un algorithme similaire à l'algorithme de gradient à pas optimale pour résoudre (2).

Exercices de révision

Exercice 1 (TVI et dichotomie) : Soit $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. L'objectif de cet exercice est de revoir le Théorème des Valeurs Intermédiaires et comment il permet de déterminer un zéro de f.

1. Dans le cas où pour $a < b$ on a $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, rappeler le théorème.

2. On définit les suites $(a_n)_n$ et $s(b_n)_n$ comme suit :

$$a_{n+1} = \begin{cases} c_n & \text{si} \quad f(c_n) < 0 \\ a_n & \text{sinon} \end{cases} \qquad b_{n+1} = \begin{cases} c_n & \text{si} \quad f(c_n) > 0 \\ b_n & \text{sinon} \end{cases}$$

   et $a_{n+1} = b_{n+1} = c_n$ si $f(c_n) = 0$ où $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$.

   a) Montrer que $(a_n)_n$ est une suite croissante et $(b_n)_n$ est décroissante.

   b) Que dire de la limite de la différence $b_n - a_n$?

   c) Conclure en donnant un algorithme permettant d'obtenir un zéro de f.

Exercice 2 (Point fixe) : Soit $f(x) = 2x^4 - x - 2$. On cherche à déterminer le ou les 0 de $f(x)$.

1. Donner le tableau de variations de f et déduire le ou les 0 de f.

2. Considérons la suite $x_{n+1} = 2x_n^4 - 2$.

   a) Si la suite converge, justifier qu'elle converge vers un 0 de $f(x)$.

   b) La suite converge-t-elle ?

3. Déterminer une fonction $\Phi(x)$ t.q. la suite $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ soit convergente et converge vers le 0 de f.

Exercice 3 (Méthode d'ordre supérieure) : On cherche ici à construire une méthode d'ordre r donné pour résoudre l'équation $f(x) = 0$ via une méthode de point fixe. Posons :

$$g(x) = x + \sum_{i=1}^{r} a_i(x) f^i(x)$$

L'objectif sera de déterminer les fonctions $a_i(x)$ pour que la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ soit d'ordre r. On supposera que $f(x^*) = 0$ et les dérivées $f^{(i)}(x^*) \neq 0$ pour tout $i \geq 1$.

1. Justifier que si x^* est un point fixe de $g(x)$ alors c'est un 0 de $f(x)$.

2. a) Rappeler la condition que doit vérifier $g(x)$ et ses dérivés pour que la suite soit d'ordre r.

   b) Déduire $a_1(x)$ pour que la méthode soit au moins d'ordre 2. Quel méthode retrouve-t-on ?

   c) Déduire $a_2(x)$ pour que la méthode soit au moins d'ordre 3.

3. (Application) Reprendre l'exemple de l'exercice 2 sur le calcul de racine et proposer une méthode plus performante que la *méthode de Héron*.

Applications et programmation

Pour cette section, je vous invite à faire les programmes en *Python* à l'aide des modules *NumPy* et *MatPlotLib*. L'avantage est que ces outils sont gratuits et multiplate-forme (et sont ceux utilisés en TP !). Il est également possible de faire ces programmes en *Matlab* (payant), *Scilab* (gratuit et aussi multiplate-forme), ou même en C / C++ (les outils de visualisation étant moins facile à mettre en place).

Exercice 1 (Newton vs F.P.) : L'objectif de cet exercice est de comparer les méthodes de Newton de de la fausse position. On considèrera à titre d'exemple le calcul de la racine de 2 avec comme fonction $f(x) = x^2 - 2$.

1. Rappeler les ordres théoriques des méthodes dans ce cas.
2. a) Implémenter la *méthode de Newton* et vérifier à l'aide d'un programme test la méthode.
   b) Représenter dans un graphique le $\log(|x_{n+1} - \sqrt{2}|)$ en fonction de $\log(|x_n - \sqrt{2}|)$. Comment retrouver l'ordre à l'aide de ce graphique ?
3. Procéder de même pour la *méthode de la fausse position.*

Exercice 2 (évolution de population) : On s'intéresse ici à l'évolution d'une population, où plus précisément à son comportement en temps long. On suppose que d'une année à l'autre, la population évolue ainsi :

$$x_{n+1} = R(x_n)x_n$$

où $R(x_n)$ représente la proportion d'individus x_n survivants. Divers modèles existent dans la littérature :

- Le *modèle de Malthus* $R(x) = r > 0$ correspondant à une situation où aucune contrainte n'est imposée à la population.
- Le *modèle de Verhulst* $R(x) = \dfrac{r}{1 + Kx}$ où l'évolution est ralenti si la population est grande, ce qui représente une situation de resources limitée.
- Le *modèle prédateurs / proies* $R(x) = \dfrac{rx}{1 + (x/K)^2}$ où la population est soumise à une prédation d'autant plus forte que le nombre d'individus est grand.

Dans chacun de ces cas, on cherche à déterminer les situations stationnaires, c'est à dire t.q. $x^* = x^* R(x^*)$. Déterminer ces points stationnaires dans les différents cas à l'aide de la méthode de Newton.

Exercice 3 (identification de paramètres) : Reprenons l'exemple du cours : On suppose qu'on connait la trajectoire $(x(t), y(t))$ d'un projectile à certain instant $(t_n)_n$. L'objectif est de déterminer les paramètres (x_0, y_0), position initial, (P, θ), puissance et angle de tir, du projectile sachant qu'il obéit aux lois de Newton :

$$x(t) = P\cos(\theta)t + x_0 \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{-g}{m}t^2 + P\sin(\theta)t + y_0$$

1. Écrire ce problème comme un problème de minimisation.
2. a) Écrire une fonction générant des positions $(x_n, y_n)_n$ d'une trajectoire étant donnée les paramètres choisis. On perturbera les valeurs de x_n et y_n par une légère incertitude afin de simuler une imprécision sur les mesures.
   b) Implémenter et tester la méthode de Gauss-Newton proposée à l'exercice 4.