Exercices

Rappels d'algèbre linéaire

Exercice 1 (Propriétés de la transposée) : Soient $A \in M(n,n)$ et $B \in M(n,p)$ deux matrices où A est supposée inversible. Montrer les propriétés suivantes :

(a) $(AB)^t = B^t A^t$ (b) $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

Exercice 2 (norme matricielle et conditionnement) : Soit A une matrice inversible. On rappelle la définition de la norme matricielle :

$$\|A\|_q = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|_q}{\|\mathbf{x}\|_q} \qquad q = 1, 2 \text{ ou } +\infty$$

1. (a) Montrer que

$$\|A\|_q = \sup_{\|\mathbf{x}\|_q = 1} \|A\mathbf{x}\|_q$$

   (b) Montrer également que

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}| \right) \quad \text{et} \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}| \right)$$

2. Soient $A, B \in M(n,n)$ deux matrices inversibles. Montrer que
   (a) $\text{cond}_q(A) \geq 1$,
   (b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}^* : \text{cond}_q(\alpha A) = \text{cond}_q(A)$,
   (c) $\text{cond}_q(AB) \leq \text{cond}_q(A)\text{cond}_q(B)$,

3. (a) Considérons les deux problèmes suivants : $A\mathbf{x} = b$ et $A\mathbf{x}_\epsilon = \mathbf{b}_\epsilon$ où $\mathbf{b}_\epsilon = \mathbf{b} + \epsilon\delta\mathbf{b}$. Montrer :

$$\frac{\|\mathbf{x}_\epsilon - \mathbf{x}\|_q}{\|\mathbf{x}\|_q} \leq \|A\|_q \|A^{-1}\|_q \frac{\|\mathbf{b} - \mathbf{b}_\epsilon\|_q}{\|\mathbf{b}\|_q}$$

   (b) (Application) Considérons le cas suivant :

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 1.3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4.3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \delta\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

   Déterminer la *sensibilité* du système linéaire $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\epsilon\|_\infty$ en fonction de ϵ.

   (c) (Bonus) Si le déterminant de A est petit, cela signifie-t-il que la matrice aura un grand conditionnement ?

Les factorisations LU et QR

Exercice 3 (Pivotage par ligne) : Soit A une matrice inversible. On appelle matrice de *permutation élémentaire* $P(l_1, l_2)$ la matrice égale à la matrice identité dont on a permuté les lignes l_1 et l_2.

1. À l'aide d'un exemple simple sur une matrice 3x3, justifier l'appellation pour P de matrice de permutation.

2. (a) Lors du processus d'élimination de Gauss, justifier que si on peut aller jusque l'étape (k), alors il existe un coefficient $A_{lk}^{(k)} \neq 0$ où $l \geq k$.
   (b) En déduire qu'il existe une matrice M inversible telle que $MA = U$ où U est triangulaire supérieure (on peut montrer en fait qu'il existe une matrice P de permutation t.q. $PA = LU$).

3. (a) Déduire l'*algorithme d'élimination de Gauss* avec pivotage par ligne.
   (b) (Bonus) Déterminer son cout de calculs.

Exercice 4 (Résolution d'une EDO) : Considérons l'équation différentielle $-u''(x) + k(x)u(x) = f(x)$ avec $u(0) = u(1) = 0$, où $k(x) \geq 0$. Pour résoudre numériquement cette équation, on cherche une approximation u_i de $u(x_i)$ solution du système

$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2} + k(x_i)u_i = f(x_i) \quad \forall i \in \{1, \cdot, n\}$$

où $x_i = i\Delta x$, $\Delta x = 1/(n+1)$ et $u_0 = u_{n+1} = 0$.

1. (a) Écrire le système de n équations ci-dessus sous la forme d'un système linéaire $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ en précisant la matrice A et les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{b}$.
   (b) Soit $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur arbitraire de $\mathbb{R}^n$. Montrer que :
$$(A\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\Delta x^2}\left(y_1^2 + \sum_{j=1}^{n-1}(y_{j+1} - y_j)^2 + y_n^2\right) + \sum_{j=1}^{n} k(x_j)y_j^2$$
   Indication : Penser à développer le produit scalaire et réarranger les termes.
   (c) Déduire les propriétés de A et proposer un algorithme de résolution du système linéaire.
2. (a) Montrer que l'on peut décomposer A sous la forme $A = GG^t$ où G est une matrice triangulaire inférieure vérifiant $G_{ij} = 0$ si $j \leq i - 2$.
   (b) Déduire un algorithme efficace de factorisation. Quel est son cout de calculs ?

Exercice 5 (Méthode de Givens) : Soit A une matrice supposé inversible. On appelle *matrice de rotation plane* $Q^{lc\theta}$ la matrice vérifiant :
$$Q_{ij}^{lc\theta} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \neq l \text{ et } i = j \neq c \\ \cos(\theta) & \text{si} \quad i = j = l \text{ ou } i = j = c \\ -\sin(\theta) & \text{si} \quad i = l \text{ et } j = c \\ \sin(\theta) & \text{si} \quad i = c \text{ et } j = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
avec $l < c$.

1. (a) Montrer que la matrice $Q^{lc\theta}$ est *orthogonale.*
   (b) Lorsqu'on calcule le produit $Q^{lc\theta}A$, quelles lignes de A sont modifiées ?
2. (a) Montrer qu'on peut déterminer l, c et θ pour avoir $A^{(2,1)} = Q^{lc\theta}A$ vérifiant $A_{2,1}^{(2,1)} = 0$ et $A_{ij}^{(2,1)} = A_{ij}$ pour tout $i \geq 3$ et $j \in [\![1, n]\!]$.
   (b) Déduire qu'on peut construire une suite de matrice $Q^{1j\theta_j}$, $j = 2, \cdots, n$ t.q.
$$A^2 = \underbrace{\Pi_{j=2}^{n} Q^{1j\theta_j}}_{=Q^{(1)}} A \quad \text{avec} \quad A_{i1}^2 = 0 \;\; \forall i \geq 2$$
   Quelle propriété vérifie $Q^{(1)}$?
3. Déduire une méthode de factorisation QR et l'*algorithme de Givens* permettant de résoudre un système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ à l'aide des *matrices de rotation plane.*

Exercice 6 (Minimisation moindres carrés) : On considère le problème suivant :
$$\text{Trouver } \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$$
où $A \in M(p, n)$ avec $p \geq n$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$. On suppose que la matrice A est de rang maximal, ce qui revient à dire que $\mathrm{Ker}(A) = 0$.

1. (a) Montrer que l'on peut décomposer A sous la forme $A = QR$ où $Q \in M(p, n)$ vérifie $Q^tQ = Id_n$ et $R \in M(n, n)$ où $R_{ij} = 0$ si $i > j$.
   (b) Justifier que la matrice R est inversible, et donc $R_{ii} \neq 0$ pour $1 \leq i \leq n$.
   (c) À l'aide de cette décomposition, déduire une façon de résoudre le problème de minimisation.
2. (Application) Considérons n points du plan de coordonnées $(x_i, y_i)_{i=1,\cdots,n}$. On cherche le point de coordonnées (x^*, y^*) minimisant la distance avec tous les points (x_i, y_i).
   (a) Formuler mathématiquement le problème comme un problème de minimisation.
   (b) Résoudre ce problème à l'aide de la décomposition QR.

Exercices de révision

Exerice 1 (Co-matrice) : Soit A une matrice. On appelle co-facteur et on note $\text{Cof}_{i,j}$ le terme défini par

$$\text{Cof}_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(\widetilde{A}^{ij})$$

où $\widetilde{A}^{ij}$ est la matrice A à laquelle on a enlevé la ligne i et la colonne j (donc une matrice de taille $(n-1)\times(n-1)$).

1. Posons $A(x) = A + xE^{ij}$ où E^{ij} est la matrice nulle sauf pour le coefficient $(E^{ij})_{i,j} = 1$. Montrer que $\det(A(x)) = \det(A) + x\text{Cof}_{i,j}$

2. (a) On pose Cof la matrice des cofacteurs. Que vaut $\sum_{k=1}^n a_{ik}\text{Cof}_{jk}$? Indication : Pour $i \neq j$, calculer le déterminant de la matrice B^{ij} la matrice égale à A sauf pour la colonne j qu'on remplace par la colonne i de A.

   (b) Déduire le résultat $A(\text{Cof}^t) = \det(A)Id$. En procédant de même, montrer que $(\text{Cof}^t)A = \det(A)Id$ et déduire, dans le cas où $\det(A) \neq 0$ une formule générale pour A^{-1}.

Exercice 2 (Choix du pivot) : Considérons le problème linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1. Déterminer la solution exacte de ce problème.

2. (a) En utilisant une algorithmique flottante à 3 chiffres, appliquer l'élimination de Gauss en considérant 10^{-4} comme pivot. Quel écart commet-on par rapport à la solution exacte ?

   (b) Appliquer de nouveau l'élimination de Gauss mais cette fois en effectuant un pivotage. Commenter.

Exercice 4 (Minimisation moindres carrés) : On considère de nouveau le problème de l'exercice 6 :

$$\text{Trouver } \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$$

où $A \in M(p,n)$ avec $p \geq n$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$. On suppose que la matrice A est de rang maximal, ce qui revient à dire que $\text{Ker}(A) = 0$.

1. (a) Montrer que la matrice A^tA est symétrique définie positive.

   (b) Déduire que la solution est donnée par $\mathbf{x} = (A^tA)^{-1}A^t\mathbf{b}$ (Indication : Penser à déterminer les points critiques de la fonction $\mathbf{x} \to \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$).

2. Sachant que le conditionnement 2 de la matrice A^tA est proportionnel à $\|A\|_2^2$, cette approche vous semble-t-elle meilleure ou moins bonne que celle proposées dans l'exercice 6 ?

Applications et programmation

Pour cette section, je vous invite à faire les programmes en *Python* à l'aide des modules *NumPy* et *MatPlotLib*. L'avantage est que ces outils sont gratuits et multiplate-forme (et sont ceux utilisés en TP !). Il est également possible de faire ces programmes en *Matlab* (payant), *Scilab* (gratuit et aussi multiplate-forme), ou même en C / C++ (les outils de visualisation étant moins facile à mettre en place).

Exercice 1 (Pivotage de Gauss) : On considère la résolution du système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ où A est supposée inversible et admettant une factorisation LU. L'objectif de cet exercice est de mesurer l'importance du choix du pivot dans la méthode de Gauss

1. Implémenter une fonction *luGauss* permettant de résoudre le système linéaire via l'élimination de Gauss. Cette fonction prendra en entrée une matrice A et le vecteur $\mathbf{x}$ et renverra une liste contenant la solution $\mathbf{x}$ et les matrices L et U.

2. Implémenter une deuxième fonction *luGaussPivo* permettant de résoudre le système linéaire via l'élimination de Gauss avec pivotage par ligne. Cette fonction prendra en entrée une matrice A et le vecteur $\mathbf{x}$ et renverra une liste contenant la solution $\mathbf{x}$, les matrices L et U et la matrice de permutation P.

3. (Application) Comparer les résultats obtenus par les deux méthodes pour résoudre le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 + 0.5 \cdot 10^{-15} & 3 \\ 2 & 2 & 20 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 + 0.5 \cdot 10^{-15} \\ 24 \\ 13 \end{bmatrix}$$

   Calculer également $A - LU$ et $PA - LU$. Commenter.

Exercice 2 (Ressorts) : Pour modéliser une corde vibrante, on peut considérer qu'elle est représentée par une suite de ressorts liés les uns ou autres. Lorsqu'elle vibre à la fréquence ω, chaque attache des ressorts se déplace d'une distance d_i de sa position de repos r_i. On se ramène alors à résoudre l'équation suivante :

$$k_{i-1,i}(d_i - d_{i-1}) + k_{i+1,i}(d_i - d_{i+1}) - \omega^2 d_i = 0 \quad \forall i \in \{0, n\}$$

avec $d_0 = 1$ (impulsion donnée sur la corde à son extrémité gauche), $d_{n+1} = 0$ (la corde est fixée à on extrémité droite) et le coefficient $k_{i,i\pm1}$ correspondant à la rigidité de la corde entre les points r_i et $r_{i\pm1}$.

1. Écrire le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ que l'on doit résoudre et implémenter une fonction *constructA* pour construire la matrice A. On se donnera les coefficients $k_{i,i\pm1}$.

2. Quel est la structure de A ? Implémenter un algorithme de décomposition LU spécifique *luBand* pour ce cas.

3. Résoudre le problème est faire une fonction pour représenter l'animation de la corde vibrant à la fréquence ω.

Exercice 3 (Fitting) : On considère un nuage de n points $(x_i, y_i)_{i=1,n}$ distincts donnés, où on suppose $n > 3$. Le but est de trouver le meilleur polynôme de degré 2 se "rapprochant" au mieux des données.

1. Ecrire ce problème comme un problème de minimisation à l'aide d'une matrice A de $M(n, 3)$.

2. Implémenter l'algorithme de HouseHölder pour résoudre ce problème et représenter la solution obtenue. Tester la méthode sur différents cas.

3. Cette idée peut se généraliser à un polynôme de degré p. Proposer et implémenter cette généralisation.