2 Résolution des équations non linéaires

Dans ce chapitre, on s'intéressera au problème non linéaire suivant :

$$\text{Trouver } \mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n, \quad \text{t.q.} \quad F(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \tag{11}$$

où a priori la fonction F peut être vectorielle, i.e. à valeurs dans R^p.
Remarque. Soulignons que si $p > n$, à priori le problème n'admet pas de solution dans le cas général et on s'intéresse plus tôt au problème de minimisation :

$$\text{Trouver } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \text{t.q.} \quad \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} F(\mathbf{x})$$

Dans le chapitre précédent, on a étudié des méthodes de résolution du système dans le cas particulier $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$, $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. On va maintenant étendre le champ d'étude au cas où F n'est pas forcément affine. On étudiera les méthodes pour la résolution de (11) suivantes :

- les méthodes de point fixe
- les méthodes de type Newton
- les méthode de la fausse position

Quelques problèmes types :
(Équation d'état d'un gaz). Nous voulons déterminer le volume V occupé par un gaz dont la température est T et dont la pression est p. L'équation d'état est donnée par

$$\left[p + a(N/V)^2\right](V - Nb) = kNT$$

où a et b sont deux coefficients qui dépendent du gaz considéré, N est le nombre de molécules contenues dans le volume V et k est la constante de Boltzmann. Nous devons donc résoudre une équation non linéaire dont la racine est V.

(Dynamique des populations). Pour étudier une population (par ex. une population de poissons rouges), on considère l'équation

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}R(\mathbf{x})$$

qui donne une relation entre le nombre d'individus à la génération $\mathbf{x}$ et le nombre d'individus à la génération suivante $\phi(\mathbf{x})$. La fonction $R(\mathbf{x})$ modélise la vitesse d'évolution de la population considérée et peut être choisie de différentes manières. Parmi les plus connues, on peut citer prédateurs-proies avec saturation, modèle de Malthus ou de croissance avec ressources limitées.

(Résolution d'EDO par des méthodes implicites). Les équations différentielles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de processus d'évolution physiques et biologiques, par exemple pour l'étude de la radioactivité, la mécanique céleste ou la dynamique des populations :

$$Y'(x) = f(x, Y), \quad x \in [a, b]$$

L'algorithme de résolution par une méthode implicite (*voir cours d'Analyse numérique (S6)*) :

$$Y_{n+1} = Y_n + \Delta x f(x_n, Y_{n+1}).$$

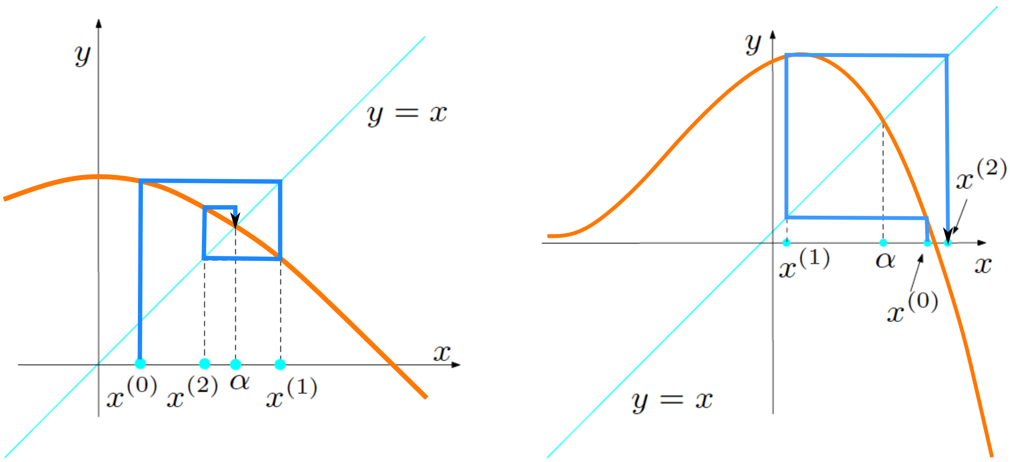
2.1 Méthode de point fixe

On cherche à résoudre le problème 11 dans le cas où F s'écrit $F(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$, avec $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction. On a alors le problème suivant à résoudre

Si un tel $\mathbf{x}$ existe, on dit que c'est un point fixe de G et on peut essayer de le calculer à l'aide de l'algorithme suivant où $\mathbf{x}^0$ est une donnée initiale :

$$\mathbf{x}^{k+1} = G(\mathbf{x}^k), \quad k \geq 0.$$

Cet algorithme est appelé méthode de point fixe ou itérations de point fixe et on dit que G est la fonction d'itération.



Convergence Divergence

Les itérations de point fixe peuvent ne pas converger, comme le montre la figure ci-dessus. Donc il nous faut établir le résultat de convergence.

Theorem 2.1. *On suppose que l'application $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vérifie la propriété*

$$\exists\, K \in]0,1[,\ \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad \|G(\mathbf{x}) - G(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Alors l'application G admet un unique point fixe et la suite $\mathbf{x}^{k+1} = G(\mathbf{x}^k)$ converge vers ce point fixe.

Démonstration.

$\square$

Définition 2.2. On dit que l'application G est différentiable au point $\mathbf{x}_0$ s'il existe une application linéaire $d_{\mathbf{x}_0}G$ vérifiant :

Cette application est appelée la différentielle et elle généralise la notion de dérivée.

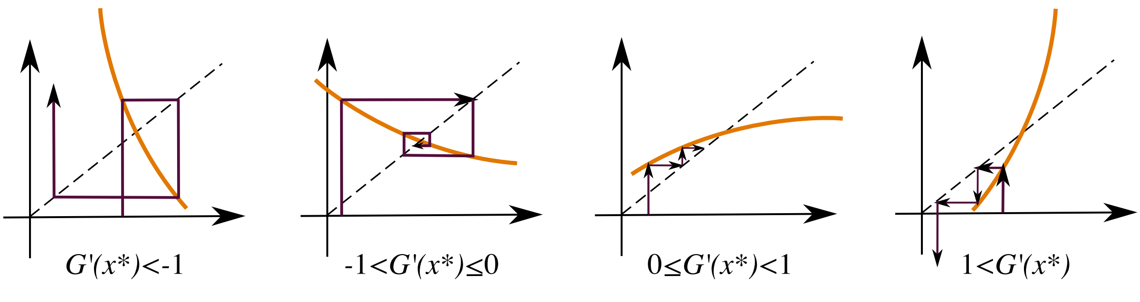
L'application linéaire $d_{\mathbf{x}_0}G$ peut être représentée par sa matrice Jacobienne :

$$\left[\frac{\partial G_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})\right]_{i,j=1}^{n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial G_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \cdot & \frac{\partial G_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial G_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial G_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Theorem 2.3. *Si l'application G admet un point fixe $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$, et différentiable en ce point et vérifie $\|d_{\mathbf{x}^*}G\| < 1$, alors il existe un voisinage V tel que $\forall\, \mathbf{x}_0 \in V$, la suite $\mathbf{x}^{k+1} = G(\mathbf{x}^k)$ converge vers le point fixe.*

Démonstration.

□



Algorithme 12 : Algorithme de point fixe

$\mathbf{x}_1 = G(\mathbf{x}_0)$

tant que $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\| \geq \varepsilon$ **faire**

  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1$

  $\mathbf{x}_1 = G(\mathbf{x}_0)$

fin

Remarque. Lorsque le test de convergence est satisfait, on a alors

2.2 Vitesse de convergence

Définition 2.4. On dit que la suite $(\mathbf{x}^k)_{k\geq 0}$ est d'ordre r s'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^r} = C$$

Remarque. Cela revient à dire $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\| \sim C\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^r$. Cette notion permet de "mesurer" la vitesse de convergence d'une suite (quand elle converge).

Si les hypothèses du théorème 2.3 sont vérifiées, on a alors :

$$\mathbf{x}^{k+1} = G(\mathbf{x}^* + \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^* + d_{\mathbf{x}^*}G(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*) + \Phi(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^k)\mathbf{x}^*.$$

d'où $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\| = \|d_{\mathbf{x}^*}G(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*) + \Phi(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^k)\|$ et donc on déduit que la suite est au moins d'ordre 1.

Theorem 2.5. *Si l'application G admet un point fixe, est r fois continûment différentiable et vérifie :*

$$d_{\mathbf{x}^*}G = \ldots = d^{r-1}_{\mathbf{x}^*}G = 0 \quad \text{et} \quad d^r_{\mathbf{x}^*}G \neq \mathbf{0}.$$

alors il existe un voisinage V t.q. $\forall\, \mathbf{x}_0 \in V$, la suite générée par $\mathbf{x}^{k+1} = G(\mathbf{x}^k)$ converge à l'ordre r vers le point fixe.

Démonstration (cas $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

□

2.3 Méthode de Newton

On présente la méthode de Newton pour la résolution du problème 11 dans le cas général. Donnons l'idée de cette méthode dans le cas particulier $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit $f \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $x^* \in \mathbb{R}$ tel que $f(x^*) = 0$. On cherche à construire une suite $\left(x^k\right)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$ qui converge vers x^* de manière quadratique (i.e. vitesse de convergence d'ordre $r = 2$). On pose

et on a $g(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0$. Si par miracle on a $g'(x^*) = 0$, alors la méthode de point fixe sur g va donner une suite $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ (pour $x^0 \in V$ donné par le théorème 2.5) telle que $x^{(k)} \to x^*$ de manière au moins quadratique. Or on a

$$g'(x) = 1 - h'(x)f(x) - f'(x)h(x)$$

et donc $g'(x^*) = 1 - f'(x^*)h(x^*)$. Il suffit donc de prendre h tel que $h(x^*) = \frac{1}{f'(x^*)}$, ce qui est possible si $f'(x^*) \neq 0$.

En résumé, si $f \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est telle que $f'(x^*) \neq 0$ et $f(x^*) = 0$, on peut construire, pour x assez proche de x^*, la fonction $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Grâce au théorème 2.5, il existe un voisinage V tel que si $x^0 \in V$ alors la suite définie par

$$x^{k+1} = g(x^k) = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)},$$

converge vers x^* de manière au moins quadratique.

Pour retenir la construction de la méthode de Newton, remarquons que la suite de Newton peut s'obtenir naturellement en remplaçant l'équation $f(x^*) = 0$ par $f(x^{k+1}) = 0$, et $f(x^{k+1})$ par le développement limité en x^k :

$$0 = f(x^{k+1}) \simeq f(x^k) + f'(x^k)(x^{k+1} - x^k).$$

Algorithme 13 : Méthode de Newton

$x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$

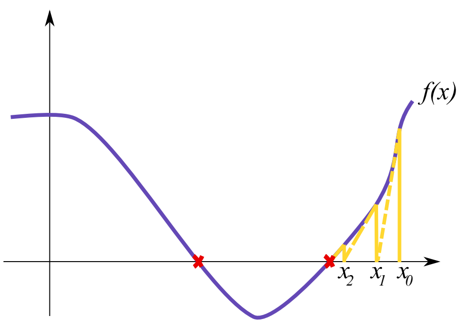
tant que $\|x_0 - x_1\| \geq \varepsilon$ **faire**

  $x_0 = x_1$

  $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$

fin

Remarque. Le point x^{k+1} est définie comme le point où la tangente de f en x^k s'annule.



Remarque. La méthode se généralise au cas d'une fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de la façon suivante :

$$G(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - H(\mathbf{x})F(\mathbf{x}) \Rightarrow d_{\mathbf{x}^*}G(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} = I - H(\mathbf{x}^*)d_{\mathbf{x}^*}F(x^*) \iff H(\mathbf{x}^*) = (d_{\mathbf{x}^*}F)^{-1}(\mathbf{x}^*)$$

et donc on a l'itération de Newton dans le cas général :

$$\boxed{}$$

Revenons maintenant sur la vitesse de convergence de la méthode de Newton. On rappelle que, en générale, la suite $(\mathbf{x}^k)_{k\geq 0}$ est de l'ordre r (où la convergence est de l'ordre r) s'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ telle que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^r} = C. \tag{12}$$

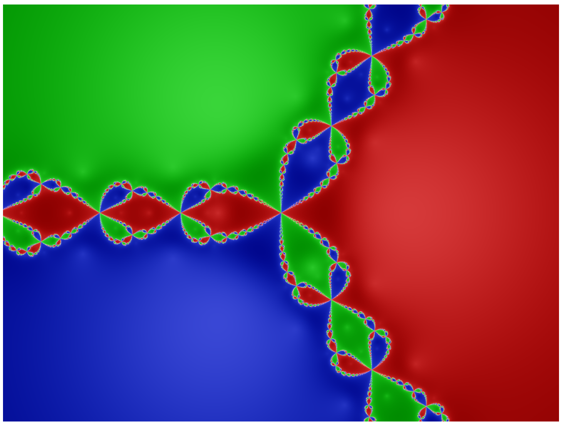
Remarquons d'abord que si une suite $(\mathbf{x}^k)_{k\geq 0}$ converge vers $\mathbf{x}^*$ lorsque k tend vers l'infini, alors on a forcément $C \leq 1$.

Dans le cas où $r = 1$, la convergence est dite

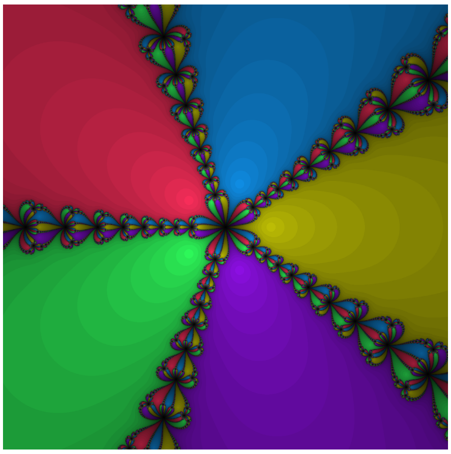
- *sous-linéaire*, si $C = 1$.
- *au moins linéaire*, si $C \in [0, 1[$.
- *linéaire*, si $C \in]0, 1[$.
- *super-linéaire*, si $C = 0$ (et on peut établir (12) pour $r > 1$)

La convergence linéaire (au sens donné ci-dessus), est déjà une convergence très rapide. Par exemple, les suites géométriques définies par $x^k = C^k$ avec $C \in]0, 1[$ sont des suites qui convergent linéairement (vers 0), car elles vérifient évidemment la définition. Si $r = 2$, la convergence est quadratique, elle est encore plus rapide que linéaire.

On a vu déjà que les méthodes de résolution d'équations non linéaires peuvent être divergente. Il faut penser à bien choisir x_0. C'est aussi le cas de la méthode de Newton, introduite ci-dessus. Lorsqu'elle converge, elle converge très vite (comme on a vu par construction la vitesse de convergence est quadratique). Mais lorsqu'elle diverge, elle diverge aussi très vite.



(a) $z^3 - 1 = 0, \ z \in \mathbb{C}$



(b) $z^5 - 1 = 0, \ z \in \mathbb{C}$

FIGURE 12 – Bassins d'attraction des racines du polynôme (en couleur).

2.4 Méthode de la fausse position

On rappelle que dans la méthode de Newton on génère la suite x^k ainsi :

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}.$$

Pour pouvoir utiliser la méthode, on calcule la dérivée f'. Dans certaines situations, ce calcul peut être coûteux voir impossible. Une idée est alors d'utiliser l'approximation de la dérivée :

$$f'(x^k) \simeq \frac{f(x^k) - f(x^{k-1})}{x^k - x^{k-1}}.$$

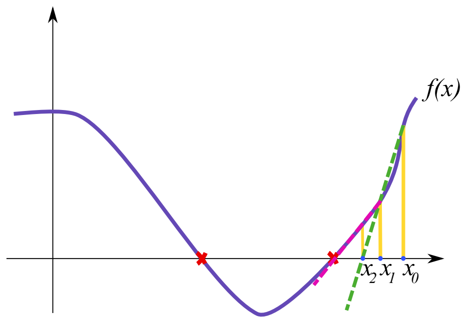
On en déduit alors *la méthode de la fausse position*

$$x^{k+1} = x^k - \frac{x^k - x^{k-1}}{f(x^k) - f(x^{k-1})} f(x^k)$$

Remarque.

1. À la différence de la méthode de Newton, il faut deux points pour initialiser la méthode de la fausse position.
2. L'itérée x^{k+1} correspond au point où s'annule la droite définie par :

$$y = \frac{f(x^k) - f(x^{k-1})}{x^k - x^{k-1}}(x - x^k) + f(x^k).$$



Theorem 2.6. *Si f est 2 fois continûment différentiable, admet un 0 en x^* et $f'(x^*) \neq 0$, alors il existe un voisinage V dans lequel la méthode de fausse position converge et est d'ordre $(1+\sqrt{5})/2$ au moins.*

Algorithme 14 : Méthode de la fausse position

$x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$

tant que $\|x_0 - x_1\| \geq \varepsilon$ **faire**

  $x_2 = x_1 - (x_1 - x_0)f(x_1)/(f(x_1) - f(x_0))$

  $x_0 = x_1$

  $x_1 = x_2$

fin

Remarque. Pour la mise en œuvre de la méthode, en particulier si le calcul de $f(x)$ est coûteux, il est intéressant de remarquer qu'à chaque étape une seule évaluation de f est nécessaire.

2.5 Conclusion

1. On est assuré de la convergence des méthodes de Newton et de la fausse position seulement lorsque l'initialisation est dans un voisinage proche de la solution. Il faut donc avoir à priori une bonne solution approchée.
2. Comparée à la méthode de Newton, où la convergence vers la racine simple est au moins quadratique, et plus précisément est de l'ordre p où p est le plus petit entier $p \geq 2$ tel que $f^{(p)}(x^*) \neq 0$, la méthode de la fausse position dans la même configuration convergera à l'ordre $\frac{1+\sqrt{1+4(p-1)}}{2}$.
3. Lorsque la racine est double les méthodes de Newton et de la fausse position convergent mais à un ordre plus petit.
4. On peut adapter la méthode de Newton pour résoudre des problèmes de minimisation.