1.3 Rappels d'algèbre linéaire (suite)

1.3.1 Éléments de théorie spectrale

Définition 1.42. Soit A une matrice carré. On appelle polynôme caractéristique et on note $P_A(\lambda)$ le polynôme définie par

Ce polynôme de degré n admet n racines complexes appelées valeurs propres. La multiplicité d'une racine est appelée *multiplicité algébrique* de la valeur propre.

Définition 1.43. On appelle vecteur propre $\mathbf{x}$ associé à la valeur propre λ un vecteur non nul vérifiant $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

Remarque. Si λ est valeur propre, alors il existe au moins un vecteur propre associé car $\det(A - \lambda I) = 0$

Définition 1.44. On appelle rayon spectrale et on note $\rho(A)$ le maximum des modules des valeurs propres.

Définition 1.45. On appelle sous espace propre associé à la valeur propre λ l'e.v. défini par $E(\lambda) = \ker(A - \lambda I)$.

Définition 1.46. On appelle *multiplicité géométrique* de la dimension du sous espace propre associé.

Proposition 1.47 (Admis)**.** *La multiplicité algébrique est supérieure ou égale à la multiplicité géométrique.*

Proposition 1.48. *Soit* $\mathbf{x} \in E(\lambda_1)$ *et* $\mathbf{y} \in E(\lambda_2)$ *où* $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *et* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq 0$. *Les vecteurs propres* $\mathbf{x}$ *et* $\mathbf{y}$ *sont linéairement indépendants.*

Démonstration.

□

Définition 1.49. On dit qu'une matrice A est diagonalisable si et seulement si il existe une matrice inversible P t.q. $A = PDP^{-1}$ où D est diagonale.

Remarque. Dire qu'une matrice est diagonalisable revient à dire qu'il existe une base dans laquelle A est diagonale. P représente alors la matrice de passage de cette base dans la base canonique. On dira que A et D sont des matrices semblables.

Proposition 1.50 (Admis). *A est diagonalisable si et seulement si la multiplicité géométrique est égale à multiplicité algébrique pour toutes les valeurs propres. De plus D est formé des valeurs propres de A.*

Exercice. Les matrices suivantes sont elles diagonalisables ?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Theorem 1.51 (Factorisation de Schur, admis).
Toute matrice A est triangularisable dans une base orthonormale, ç.à.d admet une décomposition

$$A = UTU^*$$

où U une matrice unitaire et T une matrice triangulaire supérieure.

Remarque.

1. On rappelle qu'une matrice unitaire vérifie $U^*U = I$.
2. Les coefficients des matrices U et T sont à priori complexes, même si A est à coefficients réels.
3. Les coefficients diagonaux de T sont égaux aux valeurs propres de A. En effet :

Définition 1.52. On appelle A une matrice normale si elle commute avec son adjointe :

$$AA^* = A^*A.$$

Theorem 1.53 (Diagonalisation base orthonormale).
Une matrice A est diagonalisable dans une base orthonormale si et seulement si elle est normale

Démonstration.

□

Proposition 1.54 (voir TD)**.** *Soit A une matrice telle que $A = A^*$. On a alors :*

où le spectre de A est $\lambda(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ avec $|\lambda_1| \leq \ldots \leq |\lambda_n|$.

1.3.2 Série de matrices

Définition 1.55. Soit $P(x)$ un polynôme définie par $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. On note $P(A)$ une matrice définie par $P(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i A^i$.

Proposition 1.56. *Si λ est valeur propre de A, alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(A)$.*

Démonstration.

$\square$

Theorem 1.57 (Cayley - Hamilton)**.** *En rappelant qu'on définit le polynôme caractéristique $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, on a*

Démonstration.

$\square$

Remarque.

1. On déduit de ce théorème que pour toute matrice A, on peut exprimer A^n en fonction de A^0, …, A^{n-1}.
2. On appelle polynôme minimal le polynôme P de plus petit degré satisfaisant $P(A) = 0$
   On déduit du théorème ci-dessus que $\deg(P) \leq n$.

Définition 1.58. On dira qu'une suite de matrices $(A_i)_{i\geq 0}$ converge vers A si

où $\|\cdot\|$ est une norme matricielle.

Remarque. Dans la définition ci-dessus, le choix de la norme ne compte pas. En effet, l'espace des matrices est de dimension fini, et on sait que toutes les normes sont alors équivalentes.

Proposition 1.59 (voir TD)**.**
Pour toute matrice $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une norme matricielle

subordonnée $\|\cdot\|$ *telle que*

$$\rho(A) \leq \|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

On verra par la suite que la convergence des méthodes itératives nécessite une étude de la convergence suivante

$$\lim_{i \to +\infty} A^i = 0.$$

Proposition 1.60 (CNS)**.** *Soit* $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$*, alors les conditions suivante sont équivalentes*

(i) $\lim_{i \to +\infty} A^i = 0$,

(ii) $\forall\, \mathbf{x},\ \lim_{i \to +\infty} A^i \mathbf{x} = 0$

(iii) $\rho(A) < 1$

(iv) Pour au moins une norme subordonnée $\|A\| < 1$

Démonstration.

$\square$