IS - GM3

Analyse Numérique I

2021 / 2022

Précisions :

- Lorsqu'on demande de "rappeler", aucune démonstration n'est attendue.
- Les téléphones portables, calculatrices et documents sont interdits.
- Prenez le temps de vous relire et conservez le sujet pour lire la correction après l'examen.

Exercice 1: *Questions de Cours* (9 points)

Solution: Voir cours.

1. Soit un système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ avec $\det(A) \neq 0$.
   (a) (1 point) Énoncez la formule de Cramer.
   (b) (2 points) Démontrez la.
   (c) (1 point) Expliquez succinctement pourquoi cette formule n'est pas utilisable en pratique.
2. Soient L une matrice triangulaire inférieure de taille $n \times n$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur colonne.
   (a) (1 point) Donnez les formules permettant de calculer les composante x_i de $\mathbf{x}$ vérifiant $L\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
   (b) (1 point) Écrivez l'algorithme de descente pour résoudre $L\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
3. (1 point) Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq 0$. On définit la matrice de Householder

$$H(\mathbf{v}) = I - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^t}{\|\mathbf{v}\|^2}.$$

   Montrez que si $\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ avec $\|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|$, alors $H(\mathbf{v})\mathbf{a} = \mathbf{b}$.
4. Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$ donné.
   (a) (1 point) Écrivez la formule générique des méthodes itératives permettant de calculer $\mathbf{x}^{k+1}$ en fonction de $\mathbf{x}^k$.
   (b) (1 point) Démontrez que si la méthode itérative converge, i.e. $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^*$, alors elle converge vers la solution de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Exercice 2: *Vrai ou Faux* (3 points) Les propositions suivantes sont elles vraies ou fausses. Justifiez.

1. (1 point) La matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ admet une décomposition de Cholesky.

Solution: *Vrai.* Clairement A est une matrice symétrique. Montrons que A est définie positive :

$$\begin{aligned}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \left(\begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) &= 2(x_1)^2 + x_1x_2 + x_1x_2 + (x_2)^2 \\ &= x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 > 0.\end{aligned}$$

Ainsi, A est une matrice symétrique définie positive donc elle admet une décomposition de Cholesky.

2. (1 point) La matrice $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ est symétrique définie positive.

Solution: *Faux.* Par un calcul immédiat, on a $(B\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = -1 < 0$.

3. (1 point) La matrice B ci-dessus admet une décomposition LU.

Solution: *Vrai.* On vérifie que les sous-matrices $B_1 = (1)$ et $B_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ de B sont inversibles :

$$\det(B_1) = \det(1) = 1 \neq 0 \quad \text{et} \quad \det(B_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = -5 \neq 0.$$

Exercice 3: *Algorithme de Thomas* (8 points) On considère la décomposition d'une matrice tridiagonale :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & c_3 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix} = BC,$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \dots & 0 \\ \beta_2 & 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & \beta_3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & \beta_{n-1} & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_n & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & & & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \gamma_2 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \gamma_3 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

1. (1 point) Calculez la factorisation de $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 10 & 5 \\ 0 & 6 & 18 \end{smallmatrix}\right)$.

Solution: On a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 10 & 5 \\ 0 & 6 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta_2 & 1 & 0 \\ 0 & \beta_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

En développant le produit de droite on obtient immédiatement que $\alpha_1 = 1$, $\gamma_1 = 4$, puis $\beta_2\alpha_1 = 2 \Rightarrow \beta_2 = 2$, $\beta_2\gamma_1 + \alpha_2 = 10 \Rightarrow \alpha_2 = 2$, $\gamma_2 = 5$, et enfin $\beta_3\alpha_2 = 6 \Rightarrow \beta_3 = 3$ et $\beta_3\gamma_2 + \alpha_3 = 18 \Rightarrow \alpha_3 = 3$. Et donc :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 10 & 5 \\ 0 & 6 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. (3 points) Donnez les formules permettant de calculer les α_i, β_i, γ_i en fonction des a_i, b_i, c_i.

Solution: On généralise la procédure de la question précédente. On développe le produit $A = BC$:

$$\begin{aligned}
& a_1 = \alpha_1 \\
\forall\, i = 2, \ldots, n, \quad & b_i = \sum_{k=1}^{n} B_{ik} C_{k(i-1)} = B_{i(i-1)} C_{(i-1)(i-1)} + B_{ii} C_{i(i-1)} \\
& \quad = \beta_i \alpha_{i-1} + 0, \\
\forall\, i = 1, \ldots, n-1, \quad & c_i = \sum_{k=1}^{n} B_{ik} C_{k(i+1)} = B_{i(i-1)} C_{(i-1)(i+1)} + B_{ii} C_{i(i+1)} \\
& \quad = \beta_i \cdot 0 + 1 \cdot \gamma_i, \\
\forall\, i = 2, \ldots, n, \quad & a_i = \sum_{k=1}^{n} B_{ik} C_{ki} = B_{i(i-1)} C_{(i-1)i} + B_{ii} C_{ii} \\
& \quad = \beta_i \gamma_{i-1} + \alpha_i
\end{aligned}$$

En inversant ces relations, on obtient

$$\alpha_1 = a_1 \quad \textbf{et} \quad \forall\, i = 2, \ldots, n, \quad \alpha_i = a_i - \beta_i \gamma_{i-1},$$
$$\forall\, i = 2, \ldots, n, \quad \beta_i = \frac{b_i}{\alpha_{i-1}},$$
$$\forall\, i = 1, \ldots, n-1, \quad \gamma_i = c_i$$

3. (2 points) Quelles sont les conditions suffisantes pour que la décomposition $A = BC$ existe ?

> **Solution:** On remarque que l'algorithme de Thomas est un cas particulier de décomposition LU donc les conditions suffisantes sont les mêmes. Pour que A admette une décomposition BC il suffit que
>
> $$\forall\, k = 1, \dots, n-1, \quad \det(A_k) = \det \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & b_{k-1} & a_{k-1} & c_{k-1} \\ 0 & \dots & \dots & b_k & a_k \end{pmatrix} \neq 0.$$

4. (2 points) Écrivez l'algorithme de décomposition $A = BC$.

> **Solution:**
>
> **Data:** A une matrice tridiagonale.
> **Result:** B et C.
> $n \leftarrow \text{size}(A)$
> $B \leftarrow I_n$
> $C \leftarrow 0$
> $C[1,1] = A[1,1]$ // on pose $\alpha_1 = a_1$
> **for** $i = 2, \dots, n$ **do**
> $C[i-1,i] = A[i-1,i]$ // on calcul γ_{i-1}
> $B[i,i-1] = A[i,i-1]/C[i-1,i-1]$ // on calcul β_i
> $C[i,i] = A[i,i] - B[i,i-1] * C[i-1,i]$ // on calcul α_i
> **end**
>
> **Algorithm 1:** Décomposition $A = BC$.

5. (2 points (bonus)) Calculez le coût de la décomposition $A = BC$ et de la résolution $BC\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

> **Solution:** D'après l'algorithme ci-dessus, la décomposition requière une division, une multiplication et une addition par itération soit $3(n-1)$ opérations. L'algorithme de descente sur $B\mathbf{y} = \mathbf{b}$ requiert en théorie n^2 opérations mais ici du fait de la nature creuse de B on a
>
> $$y_1 = b_1 \quad \text{et} \quad \forall\, i = 2, \dots, n, \quad y_i = b_i - \beta_i y_{i-1}.$$
>
> Soit uniquement $2(n-1)$ opérations pour la descente. De même la remontée sur $C\mathbf{x} = \mathbf{y}$ est simplifiée du fait de la nature creuse de C, on a
>
> $$x_n = \frac{y_n}{\alpha_n} \quad \text{et} \quad \forall\, i = n-1, \dots, 1, \quad x_i = \frac{1}{\alpha_i}\left(y_i - \gamma_i x_{i+1}\right).$$

Soit, $3(n-1)$ opérations.
Donc au total la décomposition de Thomas avec la descente et la remontée coûte $8(n-1)$ opérations

Bon courage !