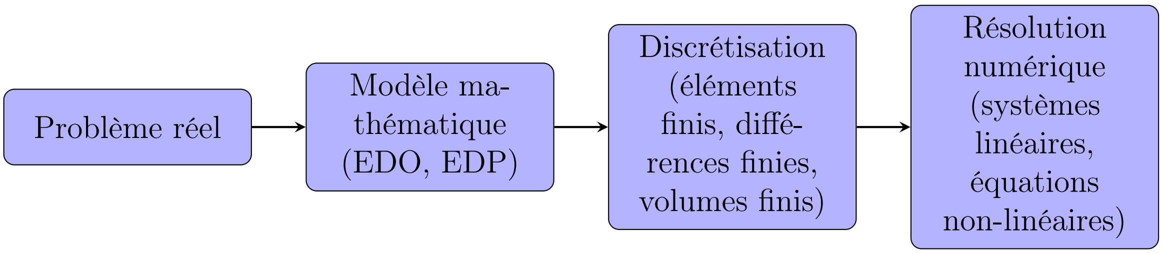
GM3 - Analyse Numérique I

Timothée Schmoderer [*]

Année 2021 - 2022

Introduction

Ce cours fait partie du module MMSN (Modélisation Mathématique et Simulation Numérique). La *Modélisation Mathématique* consiste à formuler un problème concret de la physique, de la biologie, de la mécanique etc. sous forme mathématique : équations différentielles ordinaires, équations aux dérivées partielles, système linéaire etc.).



Exemple (Équation des Ondes)**.** L'équation des ondes décrit la propagation des ondes ou les phénomènes de vibrations. Par exemple, en une dimension d'espace, elle est un modèle pour étudier les vibration d'une corde tendue. Au repos, la corde occupe un segment $I = [0, 1]$ de $\mathbb{R}$; sous l'action d'une force d'intensité f, elle se déforme et son déplacement normal est noté u (voir la figure). On suppose que la

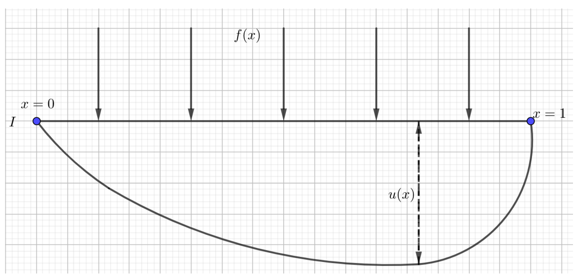


FIGURE 1 – Déplacement d'une corde élastique à t fixé.

corde est fixée sur ses bords (conditions aux limites de Dirichlet). L'équation des

[*]Ces notes sont essentiellement inspirées du cours de Maria Kazakova et d'Antoine Tonnoir. Elles sont encore en construction, pour toutes remarques timothee.schmoderer@insa-rouen.fr

ondes dont u est solution est donnée par

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x) & \text{dans} \quad \mathbb{R}_*^+ \times I \\ u(t, x=0) = u(t, x=1) = 0 & \text{pour tout } t \\ u(t=0, \cdot) = u_0(\cdot) & \text{dans} \quad I \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t=0, \cdot) = u_1(\cdot) & \text{dans} \quad I \end{cases} \tag{1}$$

Remarquons qu'il s'agit d'une équation du deuxième ordre en temps et qu'il faut donc deux conditions initiales pour u. ▼

Quant à la *Simulation Numérique*, elle permet d'obtenir une solution à un problème mathématique à l'aide d'un ordinateur. Cette approche nous fournit une compréhension d'un phénomène et permet de prédire le comportement des objets en question, par exemple, une vague côtière, une onde électromagnétique ou élément de construction d'un bâtiment ou d'un avion lors de sa conception.

(a) Équation d'ondes 2D (b) Simulation vague (c) Simulation Éolienne

(d) Mode de vibration 0 (e) Mode de vibration 2 (f) Mode de vibration 3

FIGURE 2 – Exemple de simulations numériques de modèles mathématiques simples

L'**analyse numérique** considère à la fois la construction de différents algorithmes de résolution ainsi que leurs propriétés permettant de conclure si l'algorithme "marche bien" : précision, stabilité et "coût" de calcul (mémoire, temps de calcul). Les approches pour passer d'un modèle mathématique (continu) à un modèle de simulation opérationnel ("discrétisation")' sont considérées dans les cours d'Éléments finis, Différence finies ou méthodes spectrales (GM4, GM5). Une fois la bonne discrétisation adoptée, nous sommes amenés souvent à résoudre des systèmes linéaires (parfois plusieurs milliards d'équations à plusieurs milliards d'inconnues).

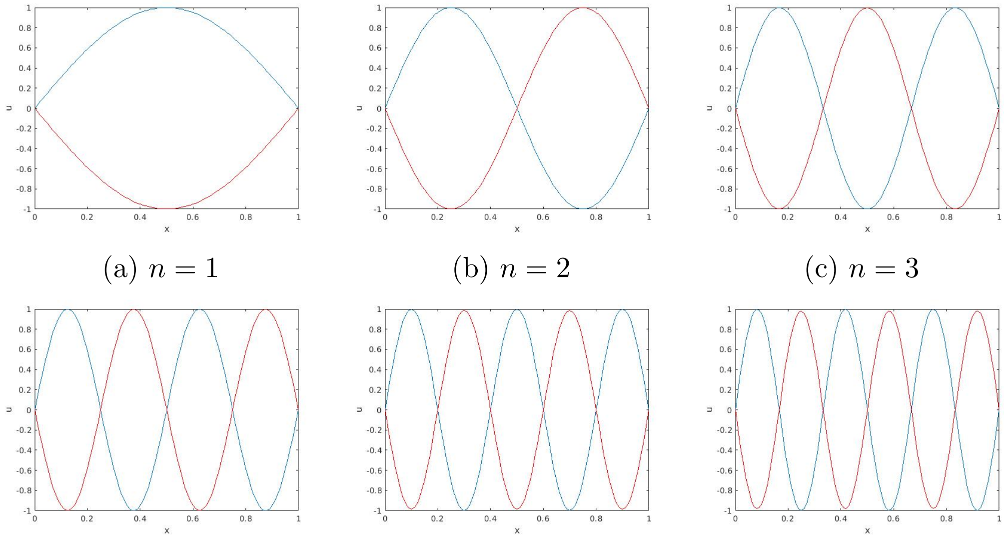
Exemple (Équation des Ondes (suite))**.** Le schéma de discrétisation implicite donne une relation entre l'approximation de u au pas de temps suivant, u^{n+1}, en fonction des deux étapes précédentes, u^n et u^{n-1}, (voir GM4 pour les détails)

$$-u_{i+1}^{n+1} + 2\left(1 + \frac{1}{r^2}\right) u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} = \frac{4}{r^2} u_i^n + u_{i+1}^{n-1} - 2\left(1 + \frac{1}{r^2}\right) u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}.$$

Ce schéma se traduit par la résolution d'un système linéaire à chaque pas de temps :

$$\begin{pmatrix} 2+\frac{2}{r^2} & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2+\frac{2}{r^2} \end{pmatrix} u^{n+1} = \frac{4}{r^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix} u^n - \begin{pmatrix} 2+\frac{2}{r^2} & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2+\frac{2}{r^2} \end{pmatrix} u^{n-1}$$

Ce schéma est très facile à implémenter et on obtient alors les résultats numériques de la figure 3 illustrant les différents mode de vibration d'une corde. ▼



(a) $n = 1$ (b) $n = 2$ (c) $n = 3$

(d) $n = 4$ (e) $n = 5$ (f) $n = 6$

FIGURE 3 – Ondes stationnaires dans une corde. La fréquence fondamentale et 5 harmoniques sont illustrées.

L'objectif du cours est de donner une réponse numérique au problème suivant :

> Pour une matrice donnée à coefficients constants A et pour un vecteur colonne donné $\mathbf{b}$, trouver un vecteur $\mathbf{x}$ tel que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Ressources à utiliser :

- ❀ Quarteroni, A., Sacco, R. and Saleri, F., 2010. *Numerical mathematics* (Vol. 37). Springer Science & Business Media.
- ❀ Burden, R.L., Faires, J.D. and Burden, A.M., 2010. *Numerical analysis : Cengage Learning*. Brooks/Cole.

Programme du cours :

- ☞ Rappel d'Algèbre Linéaire (1,5 séances)
- ☞ Méthodes directes (3.5 séances)
- ☞ Méthodes itératives (2 séances)
- ☞ IS
- ☞ Méthodes itératives suite (3 séances)
- ☞ Résolution des équations non linéaires (4 séances)
- ☞ DS

Table des matières